Formalisme, intuition et compréhension de l'algèbre abstraite : une approche d'épistémologie expérimentale

Thomas Hausberger

Université de Montpellier
IMAG CNRS-UM 5149

5-13 Novembre 2020
French PhilMath Workshop 12

Définition de la didactique, selon Brousseau

But de cette introduction : éclairer le projet de la didactique et son rapport à l'épistémologie avant d'aborder des regards croisés entre philosophie, épistémologie et didactique des mathématique sur le thème du formalisme et de l'abstraction.

didactique et Didactique

La didactique des mathématiques est l'art de concevoir et de conduire des conditions qui peuvent déterminer l'apprentissage d'une connaissance chez un actant, ces conditions devant pouvoir être mises en oeuvre et reproduites intentionnellement. La Didactique est l'étude de la didactique.

Référence : Guy Brousseau. Theory of Didactical Situations in Mathematics. Springer Netherlands, 2002.

Définition de la didactique, selon Brousseau

Une problématique didactique et épistémologique

La reformulation, la réorganisation permanente des idées dissimule la genèse initiale des connaissances. La démonstration de mille pages crée une vague de reprises et de réformes qui lui reviennent et la réduisent à deux cents puis a cinquante pages en un mouvement qui reprend et détruit et féconde la mémoire. A ce jeu, l'Histoire des Mathématiques s'essouffle et l'Epistémologie, la science de la genèse des concepts, s'égare sans parvenir à délivrer à la Didactique des Mathématiques les modèles essentiels d'une prise de connaissance spécifique du savoir visé. Alors le texte des Mathématiques est contraint à devenir à la fois l'origine, l'expression et la conclusion de la pensée qu'il veut transmettre, une pensée sans genèse. Les béotiens peuvent alors venir visiter le temple, en parler, s'en éblouir et le vanter. Ils peuvent le découper pour en vendre des copies à de jeunes esclaves chargés de l'apprendre et de le reproduire, sous la menace. Mais comment redonner vie à ces momies ?

Définition de la didactique, selon Brousseau

Commentaires :

- La distance entre les savoirs enseignés et la pratique savante de référence : le texte du savoir s'accompagne d'une perte de sens.
- La mise en regard de la **genèse historique d'un concept** et de la « prise de connaissance spécifique du savoir visé », c'est-à-dire l'acquisition de ce concept par un apprenant dans une **genèse** dite « artificielle » ou « **expérimentale** », **en classe**.
- L'insuffisance de l'épistémologie historique pour produire les modèles épistémologiques nécessaires à une genèse expérimentale (les contraintes ne sont pas les mêmes).
- La didactique ou « **épistémologie expérimentale** » va donc produire ses propres reconstructions des concepts, qui préservent leur sens mais facilitent leur enseignement et apprentissage.

La réponse de Brousseau au "problème épistémologique"

La situation fondamentale

Il existe pour tout savoir une famille de situations susceptibles de lui donner un sens correct (par rapport à l'histoire de ce concept, par rapport au contexte social, par rapport à la communauté scientifique). [...] Pour toute connaissance, il est possible de construire un jeu formel, communicable sans utiliser cette connaissance, et dont elle détermine pourtant la stratégie optimale.

Commentaire :

- La notion de **situation fondamentale** interroge les raisons d'être des concepts mathématiques, la part du **nécessaire** et du **contingent** dans le développement des connaissances.
- L'**activité de l'apprenant comme révélatrice** de caractéristiques épistémologiques des savoirs et leur éventuelle sous-détermination par les situations proposées.

Plan

Forme et contenu

Référence : Gilles-Gaston Granger. Formes, Opérations, Objets. Vrin, 1994.

- Granger part de l'opposition classique entre matière et forme, qui est vue comme une relation de **co-détermination** entre une forme et son contenu
- **Opposition relative** : ce qui est forme peut devenir contenu à un niveau supérieur d'organisation
- La forme est « le **cadre invariant** à l'intérieur duquel le **contenu** fonctionne comme **porteur d'information** »
- Il s'oppose ainsi à l'idée que les mathématiques ne seraient qu'un langage, un cadre vide : il soutient la thèse qu'elles possèdent un « **contenu formel** »
- Ce contenu est formel parce que l'expérience sensible n'y joue aucun rôle essentiel.

Opérations et Objets

- Par information, Granger entend l'établissement de propriétés décrivant des **objets**
- Ces objets sont soumis à des **opérations de pensée** comme comparer, classer, mesurer et la forme en constitue les invariants opératoires
- Principe de **détermination réciproque** de tout système d'objets de pensée avec le système d'opérations intellectuelles associées
- Granger parle de « **dualité** entre opérations et objets » par analogie avec les cas de dualité en mathématique : renversement de point de vue qui conserve la forme, permutation du système d'objets et du système d'opérations
- Exemple de la théorie des probabilités : « le système opératoire détermine une espèce d'objets : les variables et les suites aléatoires [...], le travail d'élaboration axiomatique a permis de rendre corrélatives de propriétés syntaxiques les intuitions plus ou moins précises de l'aléatoire ».

Intuition sensible et intuition symbolique

- Pour Granger, « l'institution d'une opposition de forme à contenu est toujours, et à tous les degrés d'élaboration, le premier moment décisif de **l'objectivation d'une expérience**, de sa **transposition dans un système symbolique** »
- Le processus phénoménologique de reconnaissance de forme se déroule dans l'intuition sensible mais la mise en évidence d'une forme nécessite une représentation symbolique du vécu
- Aux formes kantiennes de l'intuition sensible, Granger substitue une **intuition symbolique** (sémiotique transcendentale), la dualité entre opérations et objets sert de principe transcendental
- Le contenu formel est un a priori synthétique dont la source est « conceptuelle plutôt qu'intuitive »

Compréhension de la structure de schmilblick

L'exemple qui suit est une **invention didactique**. Le but est d'étudier et de favoriser le travail de conceptualisation d'une structure mathématique abstraite, donc d'élaboration de son contenu formel.

Définition axiomatique de la structure de schmilblick

Un **schmilblick** est la donnée d'un ensemble E muni d'une relation binaire $\mathcal{R}$ tel que les axiomes suivants sont satisfaits :

(i) aucun élément ne vérifie $x\mathcal{R}x$;
(ii) si $x\mathcal{R}y$ et $x\mathcal{R}z$ alors $y = z$;
(iii) si $y\mathcal{R}x$ et $z\mathcal{R}x$ alors $y = z$;
(iv) pour tout x, il existe au moins un y tel que $x\mathcal{R}y$.

$\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ muni de $x\mathcal{R}y \Leftrightarrow y = x + \bar{1}$ est un schmilblick.
On demande de classifier les schmilblicks de cardinal 3 et 4.

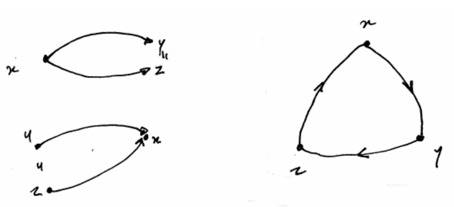
Analyse à travers les catégories de Granger

- Un schmilblick est la donnée d'une **forme**
- La pensée symbolique est devenue formelle : l'opératoire a pris le dessus sur l'objectal, il s'est autonomisé (pas de référence à une signification particulière)
- Ne subsiste qu'un système de règles, le moment d'objectivation d'une expérience est passé : l'expérience est à reconstruire (inversion), son absence se présente comme un mystère. Quels actes de pensée derrière l'opératoire symbolique ?
- Présence d'un **deuxième niveau forme/contenu** : l'opération mentale de classifier introduit un second niveau opératoire qui vise à déterminer le schmilick en tant que **structure** (la forme devient objet ; c'est la thématisation de Cavaillès).

Travail d'un binôme d'étudiants

- Dominique : Alors c'est quoi cette structure ?
- Claude : La relation d'ordre sur $\mathbb{R}$ ressemble à ça... le fait que $\mathbb{R}$ soit archimédien. Puis il se ravise.
- Dominique : C'est une sorte de shift sur $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ (au vu de l'exemple $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ muni de $x\mathcal{R}y \Leftrightarrow y = x + \bar{1}$).
- Les étudiants thématisent cet exemple à des shifts à gauche et à droite sur des ensembles tels que $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ et $\mathbb{R}$.
- Ils produisent également de nouvelles représentations sémiotiques pour les axiomes (ii) et (iii), ce qui les amène à représenter un schmilblick de cardinal 3 dans le formalisme de la théorie des graphes (sans pour autant lui donner le statut de modèle au sens de la théorie des modèles) :

Sémiotique de la « logique des relations » et théorie des graphes



claude: Globalement, on a un point x qui s'amène sur y et sur z, on a nécessairement l'égalité.

prof: Quel est pour vous le statut de ces dessins ?

claude: Ceux-là, c'est pour expliciter un peu les relations, enfin (ii) et (iii), et celui-là [dessin de droite de la figure], c'est pour nous donner une idée d'un modèle qui ressemblerait à ça [désignant l'axiomatique des banquets].

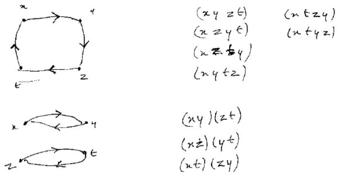
Commentaires

- Les étudiants associent la forme de schmilblick aux actions de décaler à droite ou à gauche, ou tourner dans le sens horaire ou anti-horaire.
- L'intuition symbolique se développe ainsi en appui sur les formes de l'intuition sensible
- Toute structure est figurée par la spatialité des symboles, ce qui s'avère classiquement fertile en mathématique (raisonnements géométriques, combinatoire)
- Les étudiants symbolisent spontanément la relation de $x\mathcal{R}y$ par une flèche orientée : le formalisme de la théorie des graphes offre un point de vue géométrique synthétique global par rapport au point de vue axiomatique analytique local ; les neurosciences expliquent pourquoi ce point de vue est cognitivement préféré
- Ceci ouvre sur un point de vue structural (géométrique) via l'identité des graphes (non étiquetés), donc un processus visuel de reconnaissance de forme (étymologie d'isomorphisme) : la structure d'une relation (Carnap)

La logique des relations de Carnap (Der logische Aufbau der Welt 1928)

Pour comprendre ce que l'on entend par la structure d'une relation, pensons au diagramme de flèches suivant : représentons tous les membres de la relation par des points. De chaque point, une flèche va vers les autres points qui lui sont en relation. Une flèche double désigne les paires pour lesquelles la relation vaut dans les deux directions. Une flèche qui retourne à son origine désigne un membre en relation avec lui-même. Si deux relations ont le même diagramme de flèches, on les dit structurellement équivalentes, ou isomorphes. Le diagramme de flèches est la représentation symbolique de la structure.

Classification des schmilblicks d'ordre 4 par le binôme d'étudiants



claude: Il y en aurait 9.

dominique: Après, on fait que réfléchir sur des objets que l'on connait. Or depuis le début, on parle de structure.

claude: Mais attends, les éléments on peut toujours les numéroter. Qu'est-ce qui pourrait boguer ?

dominique: Notre propre cohérence.

claude: Mais là, on a réfléchi sur les relations, on réfléchit pas sur les objets eux-mêmes, on n'a pas pris une relation particulière

dominique: Bon passons.

Fait didactique : la réponse des étudiants, dans le contexte de l'expérimentation, montre **un processus d'abstraction incomplet**.

the four components of a full process of abstraction (Marquis)

References : 2 articles by Jean-Pierre Marquis. Mathematical Abstraction, Conceptual Variation and Identity (2014). & Stairway to Heaven : The Abstract Method and Levels of Abstraction in Mathematics (2016)

- First moment : constitution of a **domain of significant variation** (at least three *distinct types* of entities that share *invariant features*)
- Second moment : a **formal stance** is taken regarding the individual objects (one forgets the meaning of the signs and treats them purely formally)
- Third moment : The invariant features are abstracted and presented in an autonomous fashion. The **axiomatic method** is a good tool (but there may be other methods of presentation).
- Fourth moment : a new **criterion of identity** for the abstracted entities is discovered and fixed. The domain of variation may expand but quickly a shift of attention towards intrinsic problems (classification or decomposition into well-organized patterns : structure theorems).

Idealization and Thematization

Reference : Hourya Benis Sinaceur. Facets and Levels of Mathematical Abstraction (2014).

Idealization

Leaving aside or discarding all other aspects, especially specific substantial or space-time aspects. [...] it comes down to **extracting a form** from sundry situations [...] **idealization** follows from seeing or guessing some **invariant** basic properties attached to a **plurality** of apparently **heterogeneous** situations and it leads to a **unifying view** of the different domains on which we perform the same type of operations.

This corresponds more or less to Marquis' first and second moments

Idealization and Thematization

Thematization

> isolating some property or some set of properties of the operation(s) under consideration and **viewing them on their own**, i.e., transforming the selected conjunction of predicates into a thought-object [...] Peirce called this kind of transformation "reflective" or "hypostatic" abstraction, Husserl called it "**thematization**" [...] Thematization is essential from passing [...] from the study of a structure Σ on the set S to the study of the **structure** Σ in its own right, i.e., to the study of a class of homomorphisms between structures of the type Σ. [...] Attention is paid to the **homomorphisms** rather than to the sets that are respectively source and target of them.

This corresponds more or less to Marquis' third and fourth moments

Marquis' sources : historical epistemology

- The **abstract, formal and axiomatic** are distinguished by means of distinct mathematical practices in history
- The formal and the abstract : « Towards the end of the 19th and at the begining of the 20th century, it was becoming possible to divorce symbols and their rules from a specific, fixed content, a definite meaning. Algebra was, in some of its areas, considered to be formal. By 1910, field theory and group theory were considered to be abstract and for a good reason. **But the abstract method was not quite in place yet**. »
- The **criterion of identity**, « **blind spot** in the journey through the abstract method » : topology (different criteria and decades for mathematicians to get a clear picture), category theory (isomorphism versus equivalence).
- Therefore the criterion of identity cannot be given a priori but is **derived from the theory**.

Historical epistemology and experimental epistemology

- Historical epistemology informs didacticians : difficulties/epistemological obstacles (to the emergence of the target knowledge)
- Reciprocally, Marquis proposes to experiment with students to test hypothesis arising from his account of the abstract method : « the properties that have to be substracted are not necessarily the same in the given theories [within the domain of significant variation]. **I submit that this a real cognitive stumbling block to abstraction in mathematics. A clear empirical hypothesis could be formulated and be tested on students** »
- It makes sense to combine historical and experimental epistemology to account for mathematical abstraction the more so as, being a fundamental thinking process, **abstraction has two faces, logical and psychological**

Retour sur le travail de Claude et Dominique

- Ces derniers sont transportés directement au moment de thématisation sans idéalisation
- Ils montrent une bonne maîtrise de la méthode formelle, en appui sur le symbolisme : ils ont effectué une abstraction de la nature des objets et de la sémantique des relations
- Ils traduisent le système d'axiomes dans un autre mode de présentation (géométrique) que la méthode axiomatique [ceci vient souligner la distinction de Marquis alors que les mathématiciens ont tendance à confondre méthode abstraite et méthode axiomatique]
- Mais ils ne parviennent pas à l'étape du nouveau principe d'identité attendu : l'isomorphisme de schmilblicks $\varphi : (E, \mathcal{R}) \to (E', \mathcal{R}')$ comme bijection $E \to E'$ vérifiant $x\mathcal{R}y \Leftrightarrow \varphi(x)\mathcal{R}'\varphi(y)$. Ou dans le langage des graphes : l'isomorphisme des graphes étiquetés comme identité des graphes non-étiquetés sous-jacents.
- Ceci vient questionner la nécessité du principe attendu et fait écho au relativisme pointé par Marquis.

Retour sur le travail de Claude et Dominique

- Marquis met en avant différentes fonctions de la méthode abstraite : « it was used to solve problems, to introduce new concepts and organizing principles, and even to install norms of construction ».
- La notion de norme fait référence à une pratique sociale. En didactique, cela renvoit à la classe en tant que communauté scientifique et le rôle du professeur en tant que porteur de la norme, chargé de désigner la nouvelle connaissance quand elle apparaît.
- D'où une intervention du professeur dans le milieu, ici pour contribuer à faire surgir cette nouvelle connaissance (le principe d'identité) :

Dialogue avec le professeur

prof: Pour vous, c'est une classification abstraite parce que vous n'avez pas considéré des relations particulières et que, pour n'importe quel ensemble, vous pouvez numéroter les éléments et finalement vous ramener à x, y, z, t.

dominique: Il y aurait donc 2 classes à isomorphisme près, ce genre d'objets et ce genre d'objets

claude: Là, du $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ et là du $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, en fait

prof: Vous pensez à la classification des groupes ?

dominique: Nécessairement, on pense aux classifications que l'on connait.

prof: Donc il y a 2 types d'objets et là, vous les avez énumérés tous sur x, y, z, t

dominique: On a énuméré tous les isomorphismes possibles.

prof: Tous les quoi ?

dominique: Tous les graphes, enfin tous les éléments...

prof: Vous avez listé tous les graphes orientés possibles sur x, y, z, t qui vérifient les axiomes.

claude: En fait, on a fait 2 sortes de représentations : la représentation graphique et l'autre qui nous évite de refaire tous les graphes.

prof: Et pourquoi dites-vous que ce sont deux classes ?

claude: Deux classes, c'est-à-dire ?

Emergence d'un nouveau principe d'identité

prof: Vous dites que ce sont 2 classes distinctes parce que...
dominique: Oui, parce que nous...
claude: On a mis toutes les permutations derrière, de toute façon.
prof: Et pourquoi $(xyzt)$ et $(xytz)$ seraient les mêmes ?
claude: Non, pas les mêmes, du même type.
prof: Que veut dire "être du même type" ?
claude: Je pense aux permutations. Il y en a une qui va boucler plus vite que l'autre. Je pense clairement à l'ordre qu'il y a derrière.
dominique: Une bijection. On peut passer d'un élément de cette classe à un autre par une bijection, mais pas entre les 2 classes.
prof: Ne peut-on pas toujours trouver une bijection entre 2 ensembles de cardinal 4 ?
claude: Si !
dominique: Ah oui, mais est-ce qu'elle va respecter la structure ?

Commentaires

- Des effets de contrat didactique : les étudiants lisent dans les réactions du professeur s'ils s'approchent de la réponse attendue. Ils comprennent ainsi rapidement qu'il s'agit de mettre en évidence 2 classes d'isomorphisme
- Fonctionnement de la thématisation transversalement à l'étude des différentes structures : les étudiants s'appuient sur une analogie avec les pratiques en théorie des groupes
- En l'absence d'un développement théorique à même de guider le choix d'un nouveau critère d'identité, c'est l'analogie avec la théorie des groupes de permutations et l'intuition symbolique ancrée dans le phénoménologique (« boucler plus vite ») qui guident le travail. Un critère syntaxique d'isomorphisme comme bijection préservant la relation n'intervient pas spontanément.
- Les étudiants introduisent la représentation symbolique des permutations mais ne font pas le lien avec les axiomes : $x\mathcal{R}y \Leftrightarrow y = \sigma(x)$ définit une permutation σ. [La fonction en tant que relation]. L'isomorphisme de schmilblicks correspond à la conjugaison des permutations.

Concepts

Reference : Hourya Benis Sinaceur. Facets and Levels of Mathematical Abstraction (2014).

- Sinaceur sees concepts as **historical products of the mind's activity** ; their emergence thus depends on many factors (theoretical, cultural, social, economical, political,...).
- Concept formation happens by abstraction when common features or attributes of individuals are subsumed. Subsuming is the logical technique to get generality from particulars (formalised by Russel).
- She stresses, following Frege, that a linguistic expresses F possesses a "conceptual content" (its meaning). This meets Granger's idea of formal content.
- Concepts are thought-objects that do not exist before the abstracting act (a thought experience), they are a posteriori (unlike Granger who takes experience in the Kantien sense)
- She distingues between **concrete and abstract concepts**

Concrete and abstract concepts

- Concrete pertains to the direct **sensory referents** understood under a concept while abstract hints to **non-sensory referents** (produced by repeating acts of abstraction)
- This distinction is relative and corresponds to a gradation of abstraction processes
- It may be related to cognition : abstract concepts involve the verbal brain (to understand the different aspects of the concept through **a discourse**) while concrete concepts involve the perceptual brain (**mental image** of the concept)
- In a second meaning, a concept becomes concrete by usage. As it gets more and more meaning determinations, it becomes more and more concrete.

Didactical phenomenology of mathematical structures and mental images

Reference : Hans freudenthal. Didactical Phenomenology of Mathematical Structures. Dordrecht. 1983.

mental objects versus concept attainment

> Our mathematical concepts, structures, ideas have been invented as tools to organise the phenomena of the physical, social and mental world. Phenomenology of a mathematical concept, structure or idea, means describing it in its relation to the phenomena for which it was created [...] it is didactical phenomenology, a way to show the teacher the places where the learner might step into the learning process of mankind. [...] Concepts are the backbone of our cognitive structures. But in everyday matters, concepts are not considered as a teaching object. [...] Children grasp them [mathematical objects] as mental objects and carry them as mental activities.

Fredenthal centre ainsi l'enseignement-apprentissage sur celui des concepts concrets au sens de Sinaceur.

Abstraction et analogie, identité versus unité

Référence : Henri Poincaré. Du rôle de l'intuition et de la logique en mathématiques. 1900. (deuxième congrès international des mathématiciens).

Analogie et principe d'unité interne

> Ce guide, c'est d'abord **l'analogie**. [...] Les analystes, pour ne pas laisser échapper ces analogies cachées, c'est-à-dire pouvoir être inventeurs, doivent, sans le secours des sens et de l'imagination, avoir le sentiment direct de ce qui fait l'unité d'un raisonnement, de ce qui en fait pour ainsi dire l'âme et la vie intime. Causez avec M. Hermite ; jamais il n'évoquera une image sensible, et pourtant vous vous apercevrez bientôt que les entités les plus abstraites sont pour lui comme des êtres viviants. Il ne les voit pas, mais il sent qu'elles ne sont pas un assemblage artificiel, et qu'elles ont je ne sais quel **principe d'unité interne**.

Abstraction et analogie, identité versus unité

- L'analogie nécessite un processus d'abstraction et l'abstraction permet ensuite un fonctionnement analogique et une unification. D'où un va et vient entre abstraction et analogie.
- Un principe d'unité est pour l'analogie ce qu'est un principe d'identité pour l'abstraction.
- L'analogie laisse davantage de place à l'intuition en tant qu'elle met en relation des contenus (formels)

Référence : Thomas Hausberger. La "théorie des banquets" : une ingénierie didactique pour faciliter l'entrée dans la pensée structuraliste. RDM. A paraître.

Le schmilblick est un **banquet**

Un **banquet** est la donnée d'un ensemble E muni d'une relation binaire $\mathcal{R}$ tel que les axiomes suivants sont satisfaits :

(i) aucun élément ne vérifie $x\mathcal{R}x$;

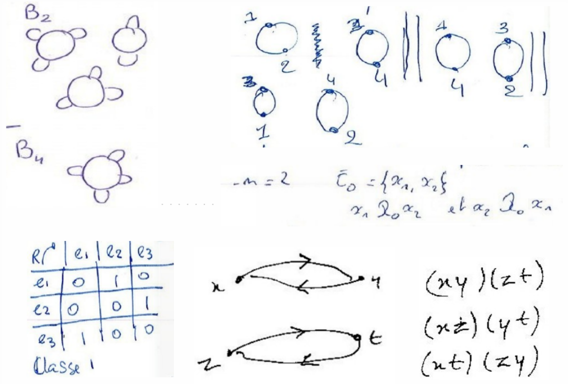
(ii) si $x\mathcal{R}y$ et $x\mathcal{R}z$ alors $y = z$;

(iii) si $y\mathcal{R}x$ et $z\mathcal{R}x$ alors $y = z$;

(iv) pour tout x, il existe au moins un y tel que $x\mathcal{R}y$.

Une **intuition** sous-jacente : l'**image mentale** de convives assis autour de tables.
Ceci fait du concept de banquet un **concept concret**.

Représentations sémiotiques produites par les étudiants



Choix terminologique et création lexicale

Référence : Pierre Cartier et Karine Chemla. Notes sur l'histoire et la philosophie des mathématiqies, II. La création des noms mathématiques : l'exemple de Bourbaki. IHES. 1998.

La création lexicale de Bourbaki (Cartier)

On peut distinguer divers modes de construction des termes mathématiques ; l'école algébrique allemande nous a légué une très riche terminologie qui en français donne : “groupe” ou “anneau” ou “corps”. Mais ces mots appartiennent à ce qu'on peut appeler la catégorie **abstraite-abstraite** où les notions abstraites d'algèbres sont désignées par des termes issus directement d'une tradition philosophique : les mots “groupe, ensemble, système, collection, catégorie,...” se réfèrent tous à la notion aristotélicienne de classe.

Un autre procédé peut être baptisé d'**abstrait-figuratif**. Bourbaki a fait sensation en introduisant dans son ouvrage d'Analyse Fonctionnelle la notion de tonneau, qui est décrite comme “... un ensemble... borné et cerclé”. Il était si fier de son invention terminologique que la récitation de cette définition faisait partie des rituels jeux de rôles qui ponctuaient les réunions du groupe Bourbaki et forgaient son identité.

La terminologie de « banquet »

- Une terminologie qui rentre dans la catégorie abstrait-figuratif en lien avec la nature de concept concret des banquets
- Cartier rajoute : « Bourbaki a fait un effort très important dans la recherche du *juste nom*, **la terminologie adéquate au concept permettant l'économie des moyens et la rigueur de la définition et du raisonnement** ».
- La terminologie de banquet est-elle un juste nom ? En quoi un choix terminologique peut-il produire de tels effets sur la pratique mathématique ?

Travail d'un second binôme d'étudiants

alice: Classique, on spécifie la structure par des relations, d'accord.
bob: Antisymétrie [à propos de l'axiome (i)]
alice: C'est pas tout à fait ça, c'est la non-réflexivité ; il y a un seul type à droite et un à gauche, c'est l'idée, quoi [des rires] ; il y a personne qui est assis tout seul à une table
bob: Les éléments sont des personnes ? Et en relation si ensemble à table ?
alice: Oui, c'est ça. La relation est d'être assis à la droite (ou à la gauche). Par contre, tu peux avoir au plus un type à droite et au plus un à gauche, il y a au moins un type à droite. Oui [continuant à lire]... il y a la théorie et les modèles. Pour montrer que c'est non contradictoire, on peut montrer qu'il y a un modèle. Je propose de prendre un type. Non, un type ne marche pas, 2 types assis l'un à côté de l'autre. Donc tu prends $E = \{x, y\}$. On peut aussi mettre $\{0, 1\}$.
bob: $\{1, 2\}$?
alice: Allez, on prend $E = \{a, b\}$ et pour la relation les couples (a, b) et (b, a). Donc c'est bien un modèle.

Travail du binôme (suite)

bob: Le cardinal 3...

alice: Le truc circulaire, des personnes a, b, c autour de la table. $(a, b), (b, c), (c, a)$. Reste à voir que c'est le seul. (a, b) moyennant numérotation, c'est toujours valable

bob: $(a, c), (c, b), (b, a)$?

alice: C'est le même modèle, à isomorphisme près.

bob: C'est vrai.

alice: (b, a)... il va avoir un soucis, car c va être envoyé sur quoi ? Si c est envoyé sur a ou b, comme a et b sont déjà atteints, on va nier (ii).

bob: Si on avait (a, b) et (b, a) on ne saurait pas quoi faire avec c...

alice: Oui, c'est ça. Parce que ses deux voisins de droite potentiels ont déjà un voisin

bob: Donc c'est forcément (b, c) et on complète.

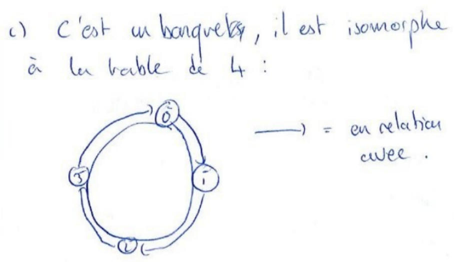
alice: Le cardinal 4 sera peut-être plus intéressant. On va dire $\{a, b, c, d\}$? [...]

alice: Donc on a toujours (a, b) ; on a toujours (b, c)... ah, est-ce que b peut s'envoyer sur a ? Ca ferait un premier branchement.

bob: Ca ferait un banquet à deux tables, en quelque sorte.

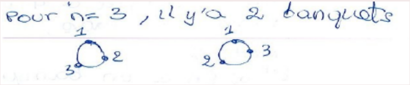
Reconnaissance de la classe d'isomorphisme par conversion vers le registre des banquets empiriques et reconnaissance d'une congruence de formes

$\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ muni de $x\mathcal{R}y \Leftrightarrow y = x + \bar{1}$



Un exemple de fonctionnement analogique fertile ; production d'une représentation symbolique figurant le principe d'unité

La tentation d'une classification quasi-empirique



- Un effet de la nature de concept concret des banquets : confusion entre une axiomatique matérielle (telle la géométrie d'Euclide) et une axiomatique abstraite possédant une pluralité de modèles
- Ravive l'objection de Frege face à la méthode de Hilbert
- Le critère d'identité est celui des banquets de l'empirie

Une pluralités de tâches pour une genèse expérimentale de la méthode abstraite

- Une tâche de **construction de modèles** en relation avec l'examen logique du système d'axiomes.
- Une tâche de **classification** de modèles.
- Une tâche de **définition axiomatique** des tablées :
  On veut placer n personnes quelconques autour d'une table ronde. Une telle configuration s'appelle une tablée de cardinal n. Quelle relation entre les personnes pourrait-on poser afin de définir abstraitement une tablée ? Enoncer un système d'axiomes définissant abstraitement une tablée.
- Une tâche d'**élaboration théorique** : définition d'un sous-banquet, d'un banquet irréductible, du banquet engendré par un élément, énoncé et preuve du théorème de structure des banquets (tout banquet est union disjointe de tablées).

Commentaires

- Un premier moment d'enrichissement sémantique pour contribuer à rendre concrète la structure et cerner l'extension du concept : le domaine significatif de variation est recréé en contrastant les modèles matériels, l'exemple $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ et d'autres modèles mathématiques possibles (sur des domaines de nombres ou encore dans le formalisme de la théorie des graphes)
- Le moment formaliste et le moment de présentation de Marquis sont présents partiellement (le moule abstrait des banquets est déjà posé) lors de la tâche de définition axiomatique des tablées
- Le 4ème moment de Marquis est divisé en la tâche de classification et celle d'élaboration théorique. Selon Marquis, la seconde devrait précéder la première ; l'expérimentation avec des étudiants a confirmé les difficultés soulevées par un ordre inverse.

Philosophie, épistémologie et didactique

- Notre propos était double :
  - montrer comment le didacticien est susceptible de s'appuyer sur les analyses des épistémologues et philosophes (notamment les clarifications conceptuelles apportées relativement aux connaissances et méthodes scientifiques) pour construire des situations d'apprentissage cohérentes et potentiellement efficaces ;
  - réciproquement, la soumission de ces situations à la contingence à travers l'expérimentation contribue à étayer le discours épistémologique parce que l'épistémologie expérimentale offre un environnement contrôlé d'actualisation et de renouvellement de l'acte de connaître.

Philosophie, épistémologie et didactique

- Ceci a permis :
  - d'observer et d'analyser, dans le travail des apprenants, comment une intuition symbolique se manifeste en appui sur les formes kantiennes de l'intuition pour appréhender un contenu formel ;
  - d'étayer le caractère problématique (relatif et normatif) d'un critère d'identité, qui mérite toute l'attention de l'épistémologue et du didacticien (illusion de transparence) ;
  - de discuter l'idée philosophique qu'une terminologie serait adéquate à un concept en ce qu'elle permette une économie de moyens.
- A son niveau, l'épistémologie expérimentale contribue ainsi à la philosophie en en concrétisant les concepts, si l'on conçoit que « le travail du philosophe est un *commentaire* perpétuel d'expériences dont il tente de montrer la possible intégration en une totalité qui ne sera jamais celle d'un système abstrait, d'une théorie comme en constituent la physique ou les mathématiques. » (Granger).

Merci !

Le banquet de Platon